

Die Mathematik der Musik

Die in der westlichen Musik verwendete Tonleiter entstand bei den alten Griechen. Ursprünglich gab es sieben Grundtöne in einer Tonleiter, die *diatonische* Tonleiter genannt wird. Sogar Nicht-Musiker kennen do-re-me-fa-so-la-ti-do. Diese Tonleiter kann mit den weißen Tasten auf einem Klavier gespielt werden, beginnend bei C. Durchlaufen Sie die diatonische Tonleiter, sind es acht Schritte vom anfänglichen *do* bis wieder zurück zu diesem *do*. Aus diesem Grund wird der Tonbereich *Oktave* genannt.

Im Laufe der Zeit wurden der westlichen Tonleiter fünf weitere Töne hinzugefügt. Diese aus 12 Tönen bestehende Tonleiter wird *chromatische* Tonleiter genannt. In einer bei C beginnenden Tonleiter werden die fünf zusätzlichen Töne auf dem Klavier über die schwarzen Tasten gespielt.

Tonleitern sind eng mit der Mathematik verknüpft. Mithilfe eines an den Computer angeschlossenen Mikrofons werden Sie die Wellenform des erzeugten Tons aufnehmen. Der Computer wird eine FFT genannt mathematische Analyse durchführen, um die Grundfrequenz des Tons zu bestimmen. Für Sie liegt die Aufgabe in der Messung der Frequenz aller Töne einer chromatischen Tonleiter und der Bestimmung eines mathematischen Musters.

Die Frequenzen zweier Töne, die gleichzeitig gespielt werden und sich angenehm anhören, weisen gewöhnlich einen besonderen mathematischen Zusammenhang auf. In dieser Übung werden Sie die Mathematik hinter Intervallen untersuchen, die gewöhnlich in der Musik Verwendung finden.

Sie sollten in dieser Übung ein elektronisches Keyboard benutzen, jedoch ist auch die Verwendung anderer Instrumente möglich.

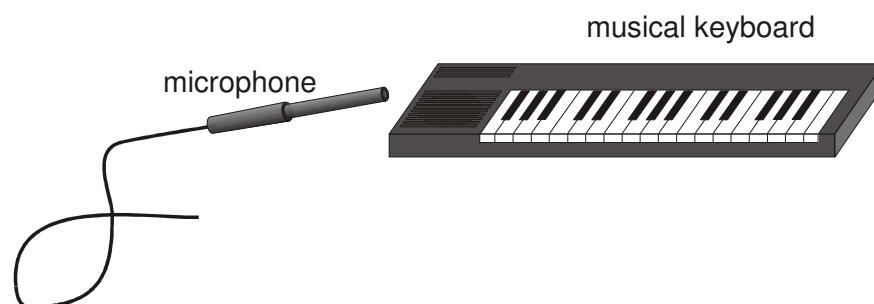


Abbildung 1

LERNZIELE

- Bestimmen der Frequenzen von Tönen einer Tonleiter
- Untersuchen des Unterschiedes und des Verhältnisses zwischen diesen Tönen
- Bestimmen des mathematischen Musters, das in Tonleitern verwendet wird

MATERIAL

Computer
Vernier Computerschnittstelle
Logger *Pro*

Vernier Mikrophon
elektronisches Keyboard oder anderes Musikinstrument

VORBEREITENDE FRAGEN

1. Welcher physikalische Begriff bezieht sich am ehesten auf das, was Musiker als *Tonhöhe* bezeichnen, d.h. wie hoch oder tief ein Ton ist?
2. Welcher physikalische Begriff steht am ehesten im Zusammenhang mit der Lautstärke einer Note?
3. Stellen Sie eine Hypothese darüber auf, wie die Frequenzen der Töne einer diatonischen Tonleiter (do-re-me...) im Zusammenhang stehen. Denken Sie, dass jeder höhere Ton um einen bestimmten zahlenmäßig bestimmbaren Grad höher ist als der vorhergehende Ton? Würden Sie annehmen, dass jeder nachfolgende Ton um einen konstanten Wert höher ist? Wie verhält es sich mit der gesamten chromatischen Tonleiter?

VORGEHENSWEISE

1. Verbinden Sie das Mikrofon mit *Channel 1* der Schnittstelle.
2. Öffnen Sie die Datei "35 Mathematics of Music" im Ordner *Physik mit Vernier*. Der Computer zeigt einen Graphen an, der die Wellenform des Tons und eine FFT anzeigt. Eine FFT ist eine *Fast Fourier Transformation*, eine mathematische Analyse der Funktion, die in ihre Einzelfrequenzen zerlegt wird. Damit wird die Grundfrequenz jedes untersuchten Tons bestimmt.
3. Erzeugen Sie den ersten zu untersuchenden Ton, das *C*. Wenn Sie ein Keyboard verwenden, schauen Sie in Abbildung 2 nach. Es handelt sich um das mittlere *C* auf einer Standard-Klaviertastatur und die Frequenz sollte etwa 262 Hz betragen. Halten Sie das Mikrofon nah an die Tonquelle und drücken Sie auf **Collect**. Halten Sie den Ton 1-2 Sekunden konstant (bis die Funktion auf dem Bildschirm erscheint). Können Sie keine einfache, wohldefinierte Funktion auf dem Bildschirm erkennen, positionieren Sie das Mikrofon neu und versuchen Sie es noch einmal.
4. Überprüfen Sie die FFT, um das Frequenzspektrum zu sehen. Das ist ein Graph, der die relative Amplitude der im Ton vorhandenen Frequenzen zeigt. Da in dieser Übung recht einfache Töne verwendet werden, werden Sie in diesem Graphen nur ein oder zwei Spitzen sehen können. Der niedrigste vorhandene Ton wird *Grundton* genannt. Die Frequenz des Grundtons wird am oberen linken Rand der FFT angezeigt. Notieren Sie diesen Wert in der Datentabelle.
5. Wiederholen Sie die Schritte 3 und 4 mit jedem der in der Datentabelle aufgeführten Töne. Die Töne 1–12 sind Töne einer Oktave. Die Töne 13, 17, 20 und 25 liegen in höheren Oktaven. Verwenden Sie die Abbildung als Referenz, um die verschiedenen Töne auf der Tastatur zu finden. Die Töne sind auch mit tiefgestellten Zahlen in der Tabelle aufgeführt, die angeben, in welcher Oktave sie liegen, wie beispielsweise C_4 .

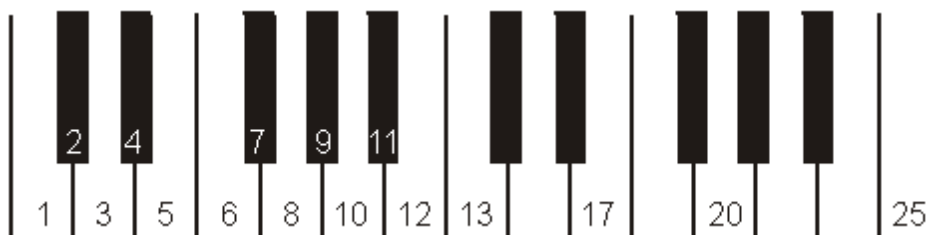


Abbildung 2

DATEN-TABELLE

Taste #	Ton	Frequenz (Hz)	Δf (Hz)	Verhältnis zum vorhergehenden Ton (Faktor)	Verhältnis zu C_4 (Faktor)
1	C_4				1.0
2	$C_4^\#$				
3	D_4				
4	E_4^b				
5	E_4				
6	F_4				
7	$F_4^\#$				
8	G_4				
9	A_4^b				
10	A_4				
11	B_4^b				
12	B_4				
13	C_5				
17	E_5				
20	G_5				
25	C_6				

ANALYSE

1. Berechnen Sie die Differenz der Frequenz von jedem Ton (außer der ersten und den letzten drei) zum vorhergehenden. Notieren Sie das Ergebnis in der Spalte Δf (Hz) der Datentabelle. Wie regelmäßig ist diese Differenz über die untersuchte Oktave?
2. Berechnen Sie das Verhältnis jeder Frequenz (außer der ersten und den letzten drei) zur vorhergehenden. Notieren Sie das Ergebnis als Faktor in der Datentabelle. Wie regelmäßig ist dieses Verhältnis über die untersuchte Oktave?
3. Füllen Sie die nicht verdunkelten Zellen der letzten Spalte aus, indem Sie das Verhältnis der Frequenz des Tons zur Frequenz des Tons C_4 berechnen.
4. Untersuchen Sie Ihre Daten der weißen Tasten (die diatonische Tonleiter). Diese Töne sind in der Datentabelle fett gedruckt. Versuchen Sie das Muster dieser Frequenzen und Abstände zu bestimmen. Können die Abstände in der letzten Spalte in Verhältnisse von kleinen ganzen Zahlen umgewandelt werden? Was würden diese ganzzahligen Verhältnisse bedeuten? [Beispiel: Faktor = 1,33; ganzzahliges Verhältnis = 4:3]
5. Wenn man alle Töne betrachtet, welches Muster besteht zwischen aufeinander folgenden Tönen? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie sich auf Ihre Ergebnisse aus dieser Übung beziehen.
6. Sagen Sie basierend auf Ihren Daten die Frequenzen der folgenden Töne voraus: C_3 , C_7 und D_5 .
7. Die Töne E_4 und C_4 repräsentieren eine Terz und harmonieren gut, wenn sie zusammen

erklingen. Dasselbe gilt für die Quinte für G_4 und C_4 , sowie die Oktave C_5 und C_4 . Welche ganzzahligen Verhältnisse charakterisieren diese musikalischen Intervalle? Denken Sie, dass alle Terzen, Quinten und Oktaven dasselbe Verhältnis aufweisen?

ERWEITERUNGEN

1. Führen Sie dieselben Messungen durch, aber mit einem von C_4 verschiedenen Startton.
2. Wenn Sie die Tasten eines Keyboards wie in der Abbildung nummerieren, können Sie einen Graphen der Frequenz gegenüber der Taste erzeugen. Führen Sie eine Kurvenanpassung an Ihre Daten durch. Welche Gleichung beschreibt den Graphen? Wie interpretieren Sie diese Gleichung?
3. Untersuchen Sie die verschiedenen Arten, wie Instrumente gestimmt werden können: rein, gleichstufig, pythagoreisch, diatonisch. Untersuchen Sie die Frequenzen eines Musikinstrumentes, das ein vollständig anderes System zum Stimmen verwendet als die hier beschriebenen, beispielsweise ein Instrument aus Südost-Asien.