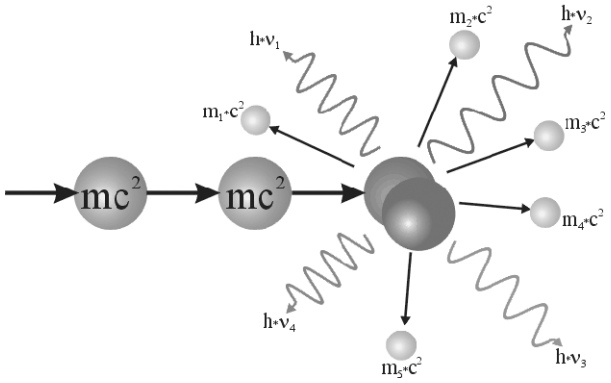


Posten 8

Energie- und Impulserhaltung in der relativistischen Physik

Sozialform	Einzel- oder Partnerarbeit
Bearbeitungszeit	40 Minuten
Voraussetzung	Posten 4: $E=mc^2$

8.1 Einleitung

Bleibt die Summe einer physikalischen Grösse in abgeschlossenen Systemen vor und nach einem Prozess konstant, so wird von einer Erhaltungsgrösse gesprochen und es lässt sich dann ein Erhaltungssatz aufstellen. Die Erhaltungssätze für Energie und Impuls aus der klassischen Physik sind bereits bekannt. Doch gibt es auch Erhaltungsgrössen in der relativistischen Physik?

In diesem Werkstattposten werden Sie lernen, dass sich für die beiden Grössen Energie und Impuls in der relativistischen Physik ebenfalls Erhaltungssätze aufstellen lassen.

8.2 Arbeitsauftrag

1) Lesen Sie aufmerksam den Text durch.

2) Lösen Sie die aufgeführten Aufgaben.

8.3 Einführung in die Erhaltungsgrössen der relativistischen Physik

Erhaltungsgrössen sind Terme, deren Summe in abgeschlossenen Systemen vor und nach einem Prozess den gleichen Wert besitzen. In der klassischen Physik ist die Summe aller Energien konstant sowie die Summe aller Impulse. Doch gilt dies auch für die relativistische Betrachtung der Physik nach Einstein?

Wir leben in einer vierdimensionalen Welt – mit den drei Dimensionen des Raumes (Länge, Breite, Höhe) und der vierten Dimension Zeit. Wenn wir still stehen, bewegen wir uns nicht im Raum (zumindest relativ zur Erde), wir bewegen uns aber in der Zeit. Wenn wir die Sterne am Himmel betrachten, so erkennen wir sie an verschiedenen Punkten im dreidimensionalen Raum und zugleich sehen wir sie auch an verschiedenen Punkten in der Zeit, weil das Licht der Sterne Jahre braucht, um uns auf der Erde zu erreichen.

Durch Einstein ist bekannt: Der Begriff der Gleichzeitigkeit ist relativ. Eine bewegte Uhr geht gegenüber ruhenden Uhren im Inertialsystem, an denen sie vorbeizieht, langsamer. Und es gilt: wenn ein Körper sich relativ zu einem Beobachter bewegt, dann misst dieser an dem Körper die Strecken, die in der Bewegungsrichtung liegen, verkürzt.
Die Masse m eines Körpers erhöht sich mit zunehmender Geschwindigkeit in Bezug auf seine von einem relativ zu ihm ruhenden Beobachter gemessene Ruhemasse m_0. Mit Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit c steigt die Masse über alle Grenzen; der Körper bekommt dabei nicht etwa mehr Materie, sondern die Trägheit eines jeden Elementarteilchens steigt. Besitzt ein Körper die Ruhemasse m_0, so ist ihr die Ruheenergie $E_0 = m_0 c^2$ äquivalent. Gibt ein Körper die Energie $\Delta m_0 c^2$ ab, so ändert sich seine Ruhemasse um Δm_0, ohne dass der Körper materielle Teilchen verliert.
Bewegt sich der Körper, so nimmt seine bewegte Masse m zu. Die relativistische kinetische Energie eines Körpers der bewegten Masse m und der Ruhemasse m_0 ist $E_{\text{kin}} = (m - m_0)c^2 = mc^2 - m_0c^2 = E - E_0$. Für die Gesamtenergie E gilt somit: $E = E_0 + E_{kin}$ mit Ruheenergie E_0 und kinetischer Energie E_{kin}. Und der relativistische Impuls ist dabei gegeben durch $p = m\,v = \gamma\, m_0\, v$.

Aufgabe 1: Beschreiben Sie kurz in einem Satz die Impuls- und Energieerhaltung, wie Sie sie in der klassischen Physik kennen gelernt haben.

8.4 Die Impuls-Energie als Erhaltungsgrösse

In der speziellen Relativitätstheorie wird immer betont: "alles ist relativ", so dass es scheinbar keine physikalischen Grössen gibt, die invariant sind. Invariante Grössen sind Grössen, die sich nicht ändern, wenn das Inertialsystem wechselt. Doch stimmt das?

In der klassischen Physik ist die Länge eine invariante Grösse, in der relativistischen Physik haben Sie bereits kennen gelernt, dass die Länge sich bei einem Wechsel des Bezugssystems sehr wohl ändert; jedoch lässt sich die Länge eines vierdimensionalen Raum-Zeit-Vektors, der ein Ereignis A in den drei Raumkoordinaten und der Zeit beschreibt, invariant gegenüber einem Wechsel des Bezugssystems definieren (für interessierte: Minkowski-Metrik). Analog ist die Impuls-Energie invariant, also eine Erhaltungsgrösse, was hier im folgendem gezeigt werden soll.

Kraft ist definiert als eine Impulsänderung pro Zeiteinheit, in der die Änderung erfolgt:

Kraft $F = \frac{dp}{dt}$ mit dem Impuls $p = mv$.

Wird Kraft längs eines Weges ausgeübt, so ist dazu Arbeit bzw. Energie notwendig. Die Energieänderung dE beträgt:

$$dE = F \cdot ds \quad \Rightarrow \quad dE = \frac{dp}{dt} \cdot ds = \frac{ds}{dt} \cdot dp = v \cdot dp \text{ mit } v = \frac{ds}{dt}.$$

Die Energie E und der Impuls p sind jedoch relativistische Grössen:

$$\Rightarrow \quad E = mc^2 \text{ und } p = mv.$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{p}{m} = \frac{p \cdot c^2}{E} \quad \Rightarrow \quad dE = v \cdot dp = \frac{p \cdot c^2}{E} dp$$

$$\Rightarrow \quad E \cdot dE = p \cdot c^2 dp$$

$$\Rightarrow \quad \int E \cdot dE = \int p \cdot c^2 dp \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} E^2 = \frac{1}{2} c^2 p^2 + const \text{ bzw. } E^2 - (c \cdot p)^2 = const.$$

In jedem Inertialsystem ist somit der Impuls-Energie konstant. Ferner gilt:

$$E_0^2 + p^2c^2 = E_0^2 + (mv)^2c^2 = m_0^2c^4 + m^2v^2c^2 = m_0^2c^4 + \frac{m_0^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2c^4(1-\frac{v^2}{c^2})}{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{m_0^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= \frac{m_0^2c^4(1-\frac{v^2}{c^2}) + m_0^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2c^4 - m_0v^2c^2 + m_0{}^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m^2c^4 = E^2$$

Damit ist gezeigt, dass $E_0 + p^2c^2 = E^2$ bzw. $E^2 - p^2c^2 = E_0 = const$ ist. Die Gleichung besagt, dass der Term $E^2 - (p \cdot c)^2 = const$ in jedem Inertialsystem denselben Wert besitzt, obwohl die Energie E und der Impuls p eines Teilchens bzw. eines Systems von Teilchen in verschiedenen Inertialsystemen jeweils verschiedene Werte haben. Im Ruhesystem ist der Impuls p=0, daher hat die Konstante den Wert der Ruheenergie E_0.

Invarianz der Impuls-Energie: $E^2 - (c \cdot p)^2 = const$

Die Impuls-Energie genügt einem Erhaltungssatz. Als invariante Erhaltungsgrösse, die man in der klassischen Mechanik nicht kennt, ist sie grundlegend für das Verständnis vieler Elementarteilchenprozesse.

Aufgabe 2: Geben Sie die Grundidee des Nachweises $E^2 - (c \cdot p)^2 = const$ in eigenen Worten wieder.

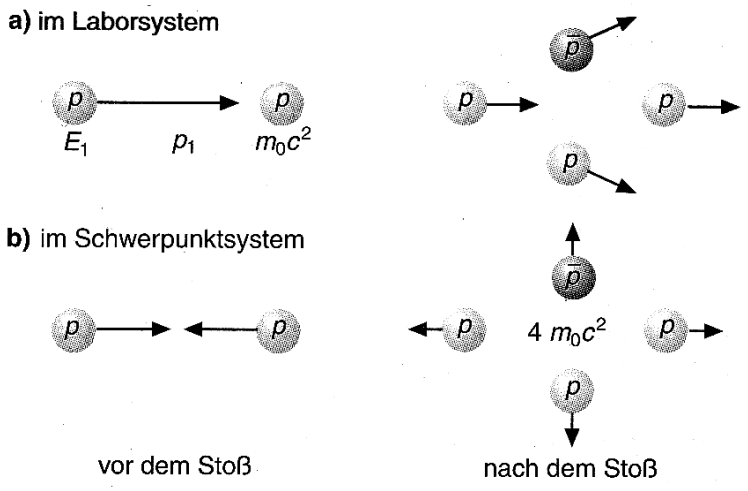
8.5 Anwendung aus der Elementarteilchenphysik

Eine der Fragen in der Elementarteilchenphysik betrifft die Grösse der notwendigen Energie eines Teilchens, um bei einem Stoss ein neues Teilchen erzeugen zu können. Als Beispiel untersuchen wir die notwendige Energie des beschleunigten Protons, um bei einem Stoss mit einem anderen Proton ein Antiproton (Teilchen mit gleicher Masse, jedoch negativer Elementarladung) zu erzeugen.

Einen solchen Stossprozess kann wie folgt geschrieben werden:

$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ (vor dem Stoss $\rightarrow$ nach dem Stoss)

Ein energiereiches Proton p stösst gegen ein ruhendes Proton p wobei durch den Stoss ein Proton p und ein Antiproton $\bar{p}$ erzeugt wird. Die Energie E des stossenden Protons muss die Ruheenergie für die beiden zusätzlichen Teilchen mit der Protonen-Ruhemasse m_0 mitbringen ($2 \cdot m_0 c^2$). Zusätzlich muss das stossende Teilchen noch die kinetische Energie der vier Teilchen nach dem Stoss liefern. Aufgrund der Impulserhaltung muss im Schwerpunktsystem der beiden stossenden Protonen der Gesamtimpuls vor und nach dem Stoss null sein.



In der links dargestellten Abbildung wird der Stossprozess dargestellt im Laborsystem (a) und im Schwerpunktsystem (b).

Aufgabe 3: Sie können sich sicher durch die Abbildung vorstellen, was mit einem Laborsystem und mit einem Schwerpunktsystem gemeint ist. Schreiben Sie in einem Satz auf, worin der Unterschied zwischen einem Laborsystem und einem Schwerpunktsystem liegt.

Folgende Energiebetrachtung für den Stossprozess lässt sich dann anstellen: Die Ruheenergie eines Protons/Antiprotons vor bzw. nach dem Stoss beträgt E_0. Die Ruheenergie von den drei Protonen und dem einen Antiproton nach dem Stoss beträgt demnach 4 E_0.

Betrachtungen im Labor-System: Das ruhende Proton vor dem Stoss hat die Energie $E_{ges1} = E_0$ und keinen Impuls, da es sich nicht bewegt. Das bewegte Proton vor dem Stoss hat die Energie $E_{ges2} = E_{kin} + E_0$ und den Impuls $(c \cdot p)^2 = (E_{kin} + E_0)^2 - (E_0)^2 = E_{kin}{}^2 + 2 \cdot E_0 E_{kin}$.

Die gesamte Energie *vor* dem Stoss beträgt somit: $E_{vor} = E_{ges1} + E_{ges2} = E_{kin} + E_0 + E_0$ (im Laborsystem) und die gesamte Energie *nach* dem Stoss beträgt: $E_{nach} = 4 \cdot E_0$ (im Schwerpunktsystem).

Uns interessiert die kinetische Energie E_{kin} des bewegten Protons vor dem Stoss, so dass genau drei Protonen und ein Antiproton nach dem Stoss entstanden sind.

Wegen der Erhaltung der Impuls-Energie kann gleich gesetzt werden: $E_{vor}{}^2 - (c \cdot p)^2 = E_{nach}{}^2$. Wird dies nun eingesetzt in die Impuls-Energie-Erhaltungsgleichung (erlaubt wegen der Invarianz), so folgt: $(E_{kin} + 2E_0)^2 - (cp)^2 = (4E_0)^2$.

Für das stossende Proton lässt sich nun noch der Impuls einsetzen. Dann ergibt sich:

$$\Rightarrow (E_{kin} + 2E_0)^2 - (E_{kin}{}^2 + 2E_{kin}E_0) = (4E_0)^2$$
$$\Rightarrow 2E_{kin}E_0 + 4E_0{}^2 = 16E_0{}^2$$
$$\Rightarrow 2E_{kin}E_0 = 12E_0{}^2$$
$$\Rightarrow E_{kin} = 6E_0$$

D.h. die kinetische Energie des stossenden Protons muss mindestens das sechsfache seiner Ruheenergie betragen, um diesen Stossprozess durchführen zu können.

Die Ruheenergie eines Protons beträgt E_0=938 MeV, so dass die kinetische Energie 5,6 GeV betragen muss, um ein Antiproton zu erzeugen. 1955 wurde erstmals mit dem 6.2GeV-Protonenbeschleuniger BEVATRON (Berkeley, Kalifornien) ein Antiproton nachgewiesen.

8.6 Zusammenfassung

Sie sollten in diesem Posten folgendes gelernt haben: Die Gesamtenergie *E* ist die Summe aus Ruheenergie und kinetischer Energie. Der Erhaltungssatz gilt damit im erweiterten Sinn, bei Elementarteilchenreaktionen kann sich Ruheenergie in kinetische Energie umwandeln und umgekehrt kinetische Energie in Ruheenergie. Neben der Energieerhaltung gilt die Impulserhaltung, d.h. bei Wechselwirkungen von Teilchen in einem abgeschlossenen System bleibt die Summe der relativistischen Impulse erhalten. Zusätzlich fügen sich Energie und Impuls zur Impuls-Energie zusammen, die einem Erhaltungssatz genügt und invariant ist gegenüber einem Wechsel des Bezugssystems.

Aufgabe 4: Wie gross ist der Impuls eines freien Elektrons, dessen Energie zehnmal so gross wie seine Ruheenergie ist?