Posten 10

Lorentz-Transformation

Sozialform	Einzel- oder Partnerarbeit
Bearbeitungszeit	30 Minuten
Voraussetzung	Posten 1 "Einsteins Postulate"
	Posten 3 „Ist Zeit relativ?“
	Posten 4 „Sind Längen immer gleich lang?“

10.1 Einleitung

Im Posten Einsteins Postulate habe Sie die Grundannahmen Einsteins kennen gelernt, auf denen die SRT beruht. In diesem Posten "Lorentz-Transformation" wird Ihnen jetzt der formale mathematische Ansatz vorgestellt, der eine Beschreibung von Ereignissen beim Wechsel des Bezugssystems ermöglicht.

Dieser Werkstattposten enthält viele Formeln und ist mathematisch eher anspruchsvoll, entscheidend ist aber nicht jedes Detail, sondern dass die wichtigsten Ideen verstanden werden.

10.2 Arbeitsauftrag

1) Lesen Sie aufmerksam den Text durch.

2) Bearbeiten Sie die gestellten Aufgaben.

10.3 Herleitung der Transformationsgleichungen

Der Holländer Lorentz hat eine mathematische Formulierung gefunden, die die Ort- und Zeitangabe von Ereignissen in Inertialsystemen unter der Berücksichtigung von Einsteins Postulaten ermöglicht. Einstein nennt die von seinem Zeitgenossen hergeleiteten Gleichungen Lorentz-Transformationen.

Von folgendem Problem wird ausgegangen: Zwei Ereignisse A und B finden in einem Inertialsystem I gleichzeitig statt. Diese Ereignisse werden von einem anderen Inertialsystem I' aus beurteilt. In I' sind A und B nicht mehr gleichzeitig. Wie gross ist in I' der Zeitunterschied zwischen diesen beiden Ereignissen?

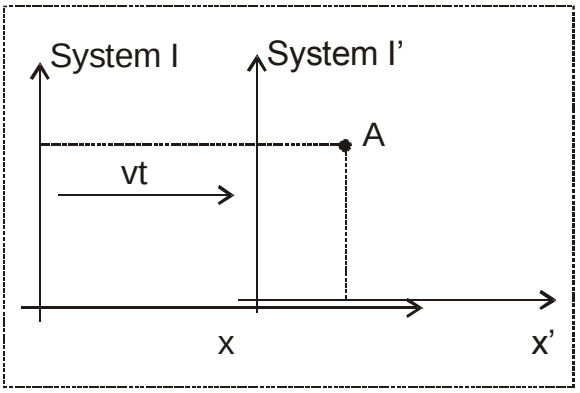

Abb. 1: Ereignis A gesehen in zwei sich relativ zueinander bewegenden Inertialsystemen.

I' bewegt sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v=s/t$ in I in der x-Richtung; I bewegt sich relativ zu I' mit der Geschwindigkeit $-v$.

Der Zusammenhang ist in der klassischen Physik durch die **Galilei-Transformation** gegeben. Die y- und z-Koordinaten ändern sich bei einer Bewegung in x-Richtung nicht. $t = t'$ setzt die Existenz einer absoluten Zeit voraus, die unabhängig vom benutzten Inertialsystem ist. Die Annahme, die bei der Herleitung der Galilei-Transformation unkritisch verwendet wurde, ist somit die Existenz einer absoluten Zeit.

$$x' = x - vt \qquad x = x' + vt'$$
$$y' = y \qquad \text{und} \qquad y = y'$$
$$z' = z \qquad z = z'$$
$$t' = t \qquad t = t'$$

Galilei-Transformation

Aufgabe 1: Gegeben seien zwei Inertialsysteme, die sich mit der Geschwindigkeit v zueinander bewegen. Zeigen Sie an Hand einer Skizze wie sich mit der Galilei-Transformation ein Punkt im System I in einen Punkt im System I' umrechnen lässt.

Folgendes Beispiel zeigt, dass die Annahme einer absoluten Zeit unter der Berücksichtigung von Einsteins Postulaten nicht haltbar ist: Ein Lichtstrahl bewegt sich im Inertialsystem I in x-Richtung, es gilt: $x = c \cdot t$
Im System I' findet sich mit der Galilei-Transformation dann folgende Gleichung für den Lichtstrahl: $x' = ct - vt = (c - v) \cdot t = (c - v) \cdot t'$

Der Lichtstrahl bewegt sich also im System I' nur mit der Geschwindigkeit c-v. Das steht im Widerspruch zu Einsteins Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen.
Die Galilei-Transformation muss also korrigiert werden. Als Resultat ergibt sich die Lorentz-Transformation.

Dazu wird folgender Ansatz verfolgt. Es wird ein Korrekturfaktor γ eingeführt, in der Form: $x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t)$
Da sich das System I' mit der Geschwindigkeit *v* relativ zu I bewegen soll, gilt für $x' = 0$ die Gleichung $x = v \cdot t$.

Nach dem Relativitätsprinzip wird die Symmetrie zwischen I und I' gewahrt, wenn ebenfalls gilt: $x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t')$

Doch wie lässt sich γ bestimmen und welche Form hat γ?

Betrachten Sie dazu folgendes: Ein Lichtstrahl muss sich sowohl relativ zum System I als auch zum System I' mit Lichtgeschwindigkeit *c* ausbreiten. Aus $x = ct$ folgt auch $x' = ct'$.

$$x' = \gamma \cdot (x - vt) = \gamma \cdot (ct - vt) = \gamma \cdot t(c - v) = \gamma \cdot \frac{x}{c}(c - v) = \gamma \cdot \frac{x}{c} \cdot c(1 - \frac{v}{c})$$

$$\Rightarrow x' = \gamma \cdot x \cdot (1 - \frac{v}{c})$$

Analog lässt sich die Ausbreitung des Lichtstrahls aus dem Inertialsystem I betrachten:

$$x = \gamma \cdot (x' + vt') = \gamma \cdot (ct' + vt') = \gamma \cdot t'(c + v) = \gamma \cdot \frac{x'}{c}(c + v) = \gamma \cdot \frac{x'}{c} \cdot c(1 + \frac{v}{c})$$

$$\Rightarrow x = \gamma \cdot x'(1 + \frac{v}{c})$$

Aus $x' \cdot x$ folgt: $x' \cdot x = \gamma \cdot x(1 - \frac{v}{c}) \cdot \gamma \cdot x'(1 + \frac{v}{c}) = \gamma^2 \cdot x \cdot x' \cdot (1 - \frac{v^2}{c^2})$

Also ist der Korrekturfaktor γ: $\Rightarrow \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Aufgabe 2: Betrachten Sie folgende drei Fälle: $v < c$, $v \approx c$ und $v > c$. Was erhalten Sie für γ in den drei Fällen?

Für den Zusammenhang zwischen *t* und *t'* gilt:

$$x = \gamma \cdot (x' + vt') \;\Rightarrow\; \frac{x}{\gamma} = x' + vt' \;\Rightarrow\; vt' = \frac{x}{\gamma} - x'$$

Mit $x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t)$ ergibt sich:

$$vt' = \frac{x}{\gamma} - \gamma \cdot (x - vt) = \frac{x}{\gamma} - \gamma \cdot x + \gamma \cdot vt = v\gamma \cdot (\frac{x}{v\gamma^2} - \frac{x}{v} + t) = v\gamma \cdot (t + \frac{x}{v}(\frac{1}{\gamma^2} - 1))$$

zudem gilt $\frac{1}{v}(\frac{1}{\gamma^2} - 1) = \frac{1}{v}(1 - \frac{v^2}{c^2} - 1) = \frac{1}{v}(-\frac{v^2}{c^2}) = -\frac{v}{c^2}$

$\Rightarrow$ daher $t' = \gamma \cdot (t - \frac{vx}{c^2})$

Eine analoge Herleitung lässt sich für die y- und z-Koordinaten durchführen. Der Ansatz $y' = \kappa \cdot y$ (mit κ als Korrekturfaktor) führt aufgrund des Relativitätsprinzips zu folgender Umkehrtransformation:

$y' = \kappa \cdot y$ und $y = \kappa \cdot y' \Rightarrow y = \kappa^2 \cdot y \Rightarrow \kappa^2 = 1 \Rightarrow \kappa = 1$. Analog für z.

Die **Lorentz-Transformation** lautet somit:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma \cdot (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma \cdot (t - \frac{vx}{c^2}) \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x &= \gamma \cdot (x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma \cdot (t' + \frac{vx'}{c^2}) \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Die Lorentz-Transformation enthält sowohl die Gleichberechtigung der beiden Systeme I und I' als auch die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Sie beschreibt mathematisch den Zusammenhang zwischen den Inertialsystemen I und I'.

Hinweis: Die Lorentz-Transformation ist eine Verallgemeinerung der Galilei-Transformation. Es lassen sich folgende drei Fälle betrachten:

1) Für $v << c$ wird $\gamma \approx 1$. D.h. wenn sich die Inertialsysteme I und I' mit einer Geschwindigkeit $v << c$ relativ zueinander bewegen, geht die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation über und die klassische Physik kann angewendet werden.

2) Für $v \approx c$ gilt die Galilei-Transformation nicht mehr, es muss die Lorentz-Transformation angewendet werden. Die Abweichungen von der klassischen Physik sind bedeutend und Ereignisse müssen relativistisch betrachtet werden.

3) Für $v > c$ wird die Lorentz-Transformation sinnlos, da γ imaginär wird. Inertialsysteme können sich nicht mit Überlichtgeschwindigkeit relativ zueinander bewegen.

Aufgabe 3: Beschreiben Sie in eigenen Worten den Unterschied zwischen Galilei-Transformation und Lorentz-Transformation.

Aufgabe 4: Betrachten Sie mit Hilfe der Lorentz-Transformation folgende Situation: Zwei Ereignisse A und B finden für den im System I ruhenden Beobachter an verschiedenen Orten aber gleichzeitig statt. Ein weiterer Beobachter bewegt sich mit hoher Geschwindigkeit an diesen beiden Ereignissen vorbei. Finden diese beiden Ereignisse auch für den bewegten Beobachter gleichzeitig statt? Hinweis: Berechnen Sie die Zeitpunkte im System I'.