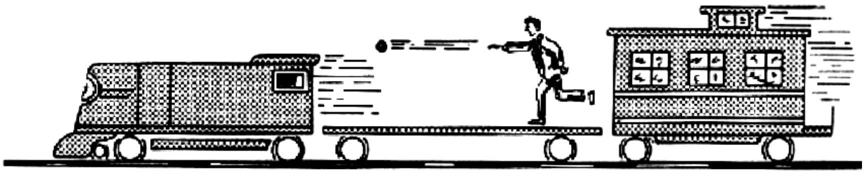

Posten 13

Addition von Geschwindigkeiten

Sozialform	Einzel- oder Partnerarbeit
Bearbeitungszeit	20 Minuten
Voraussetzung	Posten 1 "Einsteins Postulate"
	Posten 6 "Sind Massen immer gleich massiv?"
	Posten 10 "Lorentz-Transformation"

13.1 Einleitung

In diesem Werkstattposten werden Sie lernen, wie Geschwindigkeiten relativistisch addiert werden. Wenn ein Zug mit 60 km/h (relativ zu den Schienen) fährt, und in diesem Zug rollt eine Bowlingkugel mit 5 km/h relativ zum Zug in Fahrtrichtung, so würde die Kugel, nach der klassischen galileischen Physik, mit 65 km/h bezüglich des Bodens bewegen. Die Geschwindigkeiten werden einfach addiert.

Gilt diese Methode auch in der Relativitätstheorie? Was wäre dann, wenn sich der Zug mit ¾ c (bezüglich der Schiene) und die Kugel ebenfalls mit ¾ c (bezüglich des Zuges) bewegte? Dies ergäbe dann eine Relativgeschwindigkeit der Kugel zur Schiene, die grösser als die Lichtgeschwindigkeit ist. Das widerspricht den Erkenntnissen aus Posten 6, nach denen ein massereiches Objekt nur mit unendlich grossem Energieaufwand auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden kann!

Tatsächlich muss man die Geschwindigkeiten anders addieren. Das werden Sie in diesem Posten lernen.

13.2 Arbeitsauftrag

1) Vergegenwärtigen Sie sich nochmal kurz die Lorentztransformation, insbesondere die Gleichungen, um die x-Koordinate und die Zeit von einem bewegten System in ein ruhendes System zu transformieren.

2) Lesen Sie aufmerksam den Text zur Herleitung der Geschwindigkeitsaddition.

3) Lösen Sie die aufgeführten Aufgaben.

13.3 Raumschiff schiesst Rakete

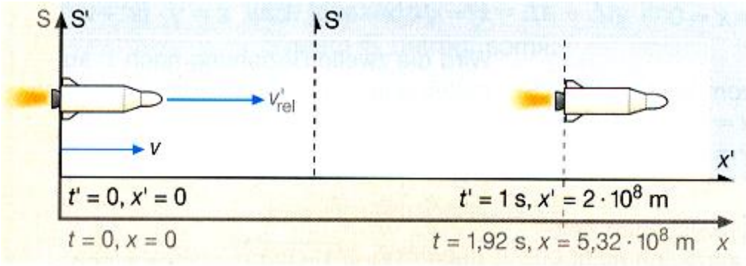

Abb. 1: Abgeschossene Rakete in den beiden Inertialsystemen

Stellen wir uns folgende Situation vor: Ein Raumschiff, das mit einer Geschwindigkeit von $v = \frac{2}{3}c$ an einem ruhenden Beobachter vorbeiflitzt, schiesst eine Rakete, die eine Geschwindigkeit von $v'_{rel} = \frac{2}{3}c$ bezüglich des Raumschiffs hat. Die Frage ist nun: *Welche Geschwindigkeit hat die Rakete bezüglich des ruhenden Beobachters?* Um diese Frage zu beantworten, berechnen wir die Strecke, die die Rakete in einer bestimmten Zeit zurückgelegt hat. Zum Beispiel in einer Sekunde, im System des Raumschiffs.
Das Bezugssystem, in dem der Beobachter ruht, nennen wir S, das System des Raumschiffs sei S' (siehe Abb. 1). Wir betrachten nun die Situation, wie sie nach einer Sekunde (des Raumschiff-Systems) in beiden Systemen aussieht:

Aus Sicht des Raumschiffs hat die Rakete nach einer Sekunde (t'=1s), bei einer Geschwindigkeit von $\frac{2}{3}c$, die Strecke $x' = v \cdot t' = \frac{2}{3} \cdot (3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s}) \cdot 1s = 2 \cdot 10^8\,m$ zurückgelegt.

Um die Strecke und die Zeit im System des Raumschiffs auf das System des ruhenden Beobachters zu übertragen, bedienen wir uns der Lorentz-Transformation, die folgendermassen aussieht:

$$x = \gamma \cdot (x' + vt') \qquad \text{und} \qquad t = \gamma \cdot (t' + \frac{vx'}{c^2})$$

Da das Raumschiff und somit das System S' eine Relativgeschwindigkeit von $\frac{2}{3}c$ zum Beobachter (System S) hat, folgt daraus ein γ von $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(\frac{2}{3}c)^2}{c^2}}} = 1.34.$

Für die zurückgelegte Strecke erhalten wir somit:

$$x = 1.34 \cdot (2 \cdot 10^8\,m + (2 \cdot 10^8\ \frac{m}{s} \cdot 1s)) \ = \ 5.37 \cdot 10^8\,m$$

Und für die dafür benötigte Zeit:

$$t = 1.34 \cdot (1s + \frac{2 \cdot 10^8\ \frac{m}{s} \cdot 2 \cdot 10^8\,m}{(3 \cdot 10^8\ \frac{m}{s})^2}) \quad = 1.94\ s$$

Die Geschwindigkeit der Rakete, wie sie der Beobachter misst, ist also $\frac{x}{t} \approx 2.77 \cdot 10^8\ m/s$.

Wir erhalten also eine Geschwindigkeit, die kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist! Insbesondere ist diese Geschwindigkeit kleiner als $\frac{2}{3}c + \frac{2}{3}c = \frac{4}{3}c$ (was nicht der eineinhalbfachen Lichtgeschwindigkeit entspricht), also der Summe der Geschwindigkeiten des Raumschiffs (bezüglich des Beobachters) und der Rakete (bezüglich des Raumschiffs).

13.4 Formale Berechnung

Betrachten wir nun einen allgemeinen Fall, ohne Zahlenbeispiele:

Die Geschwindigkeit zwischen den Systemen S und S' sei v, die Geschwindigkeit eines Objekts im System S' sei $u' = x'/t'$. Nun wollen wir die Geschwindigkeit u des Objektes im System S berechnen, indem wir wieder die zurückgelegte Strecke x durch die dazu benötigte Zeit t in das System S transformieren. Mit ein bisschen mathematischer Jongliererei ergibt das:

$$u = \frac{x}{t} = \frac{\gamma \cdot (x' + vt')}{\gamma \cdot (t' + \frac{vx'}{c^2})} = \frac{t'(x'/t' + v)}{t'(1 + \frac{vx'}{t' \cdot c^2})} = \frac{x'/t' + v}{1 + v \cdot \frac{x'}{t'} \cdot \frac{1}{c^2}} = \frac{u' + v}{1 + v \cdot \frac{u'}{c^2}}$$

Relativistische Geschwindigkeitsaddition: $$u = \frac{u' + v}{1 + v \cdot \frac{u'}{c^2}}$$

v ist die Geschwindigkeit eines *Inertialsystems* S' relativ zu einem anderen Inertialsystem S. ***u'*** ist die Geschwindigkeit eines *Objektes* im System S', ***u*** die Geschwindigkeit dieses Objektes im System S.

Für einen Beobachter ist die Geschwindigkeit eines Objektes, das sich in einem zum Beobachter bewegten Inertialsystem bewegt, kleiner als die Summe der Geschwindigkeiten vom System bezüglich des Beobachters und vom Objekt bezüglich des Systems:

$$u < v + u'$$

Bemerkungen: In der Herleitung der Formel wurde stillschweigend angenommen, dass die beiden Bewegungen des Inertialsystems S' und des darin bewegten Objekts parallel sind. Falls dies nicht der Fall ist, muss eine allgemeinere, kompliziertere Formel verwendet werden, auf die hier nicht eingegangen wird.
Bei der Messung wurden der Ort und die Zeit synchronisiert.

13.5 Einige Beispiele

Aufgabe 1:
Verwenden Sie die Formel für die relativistische Geschwindigkeitsaddition zur Berechnung der Geschwindigkeiten in folgenden Beispielen:

a) Ein Zug mit der Geschwindigkeit v bezüglich der Schiene schaltet die Photonenkanone (die Scheinwerfer) ein, und sendet somit Photonen aus, die sich mit Lichtgeschwindigkeit von den Scheinwerfern fortbewegen. Welche Geschwindigkeit hat das Photon bezüglich der Schiene?

b) Nehmen wir an, der Zug könne mit Lichtgeschwindigkeit fahren (was aufgrund der unendlichen Energie, die dazu nötig ist, eigentlich unmöglich ist). Im Zug läuft eine Person mit der Geschwindigkeit w in Fahrtrichtung. Wie schnell läuft diese Person relativ zu den Schienen?

c) Der mit Lichtgeschwindigkeit fahrende Zug schaltet seine Scheinwerfer an, und die Photonen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit bezüglich des Zuges. Welche Geschwindigkeit haben die Photonen bezüglich der Schienen?

Aufgabe 2:

a) Wir wollen die Formel für die Geschwindigkeitsaddition vereinfachen, wenn die auftretenden Geschwindigkeiten v und u' sehr viel kleiner als c sind. Wie gross wird dann ungefähr der Nenner? Und wie gross wird somit der ganze Ausdruck?

b) Kommen wir zurück zur Bowlingkugel, die in der Einführung erwähnt wurde. Wie gross wird der Nenner (in der Formel für die Relativgeschwindigkeit), für die Kugel bezüglich der Schiene?

Aufgabe 3:

a) Nehmen wir an, dass ein Zug mit einer Geschwindigkeit von ½ c rast. Eine Kugel rollt mit ¼ c in Fahrtrichtung. Wie gross ist Ihre Relativgeschwindigkeit zu den Schienen (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit)? Um wieviel weicht diese Geschwindigkeit von der "klassisch" erwarteten Geschwindigkeit ab, die sich nach der Galileischen Physik ergeben würde?

b) Wie gross ist diese Geschwindigkeit bezüglich den Schienen, wenn die Kugel mit derselben Geschwindigkeit wie vorhin, aber in entgegengesetzte Fahrtrichtung gerollt wird? Um wieviel ist nun die Abweichung von der "klassischen" Erwartung?

c) Wie gross ist die Geschwindigkeit der Bowlingkugel, wenn sie mit ½ c (also mit der Geschwindigkeit des Zuges bezüglich der Schiene) in entgegengesetzte Fahrtrichtung gerollt wird?

Aufgabe 4:

Überlegen Sie sich selber einige Beispiele, in denen sich ein Objekt in einem bewegten Inertialsystem bewegt. Rechnen Sie danach die Relativgeschwindigkeit des Objektes bezüglich eines zum bewegten System (!) ruhenden Beobachter aus. Spielen Sie also, je nach Belieben, ein bisschen mit der Additionsformel herum, um sich mit ihr vertraut zu machen.